CSIS Discussion Paper # 23

CSIS Discussion Paper # 23

ネットワーク空間における K 関数法とその計算法
The K Function Methods on a Network and their Computational Method

山田　育穂・岡部　篤行
Ikuho YAMADA, Atsuyuki OKABE

1999 年 12 月 3 日

Department of Urban Engineering, School of Engineering,
University of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656
E-mail: iku@ua.t.u-tokyo.ac.jp

概要：　本研究は，ネットワーク上に分布する点オブジェクトどうしの関係を分析するための，統計的手法を開発したものである．第1に，連続平面上の単一種類の点オブジェクト分布を分析する際によく用いられる K 関数法を，ネットワーク空間に拡張したネットワーク K 関数法を定式化する．第2に，ネットワーク上の2種類の点オブジェクト分布間の関係を扱うネットワーク・クロス K 関数法を定式化する．最後に，ここで提案したネットワーク K 関数の計算法を示す．

Abstract:　The objective of this paper is to propose new methods for analyzing relationships between point objects distributed on a network. First, the K function method, which is used to analyze a distribution of point objects on a continuous plane, is extended into the network K function method to be applied to a distribution on a network. Second, the network cross K function method is defined as a method that deals with the relationship between two distributions of point objects on a network. Third, a computational method for the network K function methods is proposed.

Keywords:　K 関数法 (the K function methods), ネットワーク (network), 点オブジェクト分布 (distribution of point objects)

1　はじめに

本研究の目的は、ネットワーク上に分布する点オブジェクトの分布状態や分布間の相互関係を分析する手法を提案することである．具体的には，連続平面上の点オブジェクト分布を扱う際に，最もよく用いられる手法の一つである K 関数法（Ripley，1981）をネットワーク空間に拡張した，新たな分析手法を提案する．

都市に限らず，私たちの生活する社会には，住宅，店舗などの多様な施設が立地し，また，病気や事故といった色々な現象が発生する．これらの事象の空間的な分布に対しては，地理学や地域経済学などの多方面に渡り，様々な角度からの研究が成されてきた．中でも，空間統計と呼ばれる分野では，上記のような空間現象を確率的な事象として分析する手法が，数多く提案されている．これまで，こうした空間現象オブジェクトの分布を扱う分析手法の多くは，連続平面上の点オブジェクトを対象とするものであったが，都市内に分布する施設の立地などを考える場合には，この連続平面の仮説はあまり現実的ではない．なぜなら，実際の都市においては，人や物の移動は道路ネットワーク上に限定されており，施設の種類によっては，立地も沿道に限られているためである．従って，より詳細かつ正確に都市空間を把握するためには，道路ネットワークを考慮した分析を行うことが望ましい．

Okabe *et al.*（1995）は，連続平面上の点オブジェクトどうしの関係を分析する手法として広く用いられる最近隣距離法，および，それを複数オブジェクトに拡張した多次元最近隣距離法（Okabe · Yoshikawa，1989）を，ネットワーク空間に発展させた．そして，都市の骨格を形成する公園などの基盤施設と，住宅など非基盤施設の分布の関係について分析を行っている．この最近隣距離法は広く利用されている手法ではあるが，あるオブジェクトの位置を最も近いオブジェクトまでの距離のみで捉えるために，分布の広域的な傾向が無視されやすいという欠点がある（Bailey · Gatrell，1995）．この欠点を補い，より広範な情報を

利用してオブジェクト分布を分析する手法として K 関数法があり，本研究ではこれをネットワーク空間に拡張する．なお，連続平面における K 関数法については，Cressie（1991），Fotheringham · Rogerson（1994），Bailey · Gatrell（1995）などに詳しい．

ところで一般に，オブジェクトどうしの関係についての問題は，単一オブジェクト内の位置に関するものと，複数オブジェクト間の相互関係に関するものの 2 つに大別できる．例えば，店舗どうしは集まって立地するのかという問題は前者，鉄道駅の周りに店舗は集まるのかという問題は後者に，それぞれ対応している．これに応じて K 関数法にもいくつかのタイプがあり，単一の点オブジェクト内の関係を扱うものは単に K 関数法，2 種類の点オブジェクト間の関係を扱うものはクロス K 関数法と呼ばれている．本研究では，それぞれについてネットワーク上への拡張を試みる．

2 章，3 章では，ネットワーク上の点オブジェクトの分布に対する K 関数法，およびクロス K 関数法をそれぞれ定義し，説明を行う．4 章は，これらのネットワーク K 関数の計算法についての説明である．最後に 5 章では，全体をまとめ，今後の発展可能性，課題等についても述べる．

2　単一の点オブジェクト分布に関するネットワーク K 関数法の提案

はじめに，扱うネットワークを定義しよう．n_L 本のリンクの集合 $L = \{L_1, L_2, \ldots, L_{n_L}\}$ と，n_Q 個のノードの集合 $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n_Q}\}$ から成る，無向ネットワーク $\mathcal{N} = \mathcal{N}(L, Q)$ を考える．ここで，このリンク全体を L_T（すなわち，$L_T = \bigcup_{k=1}^{n_L} L_k$），その総延長を l_T と表すことにする．このネットワーク $\mathcal{N}$ において，リンク L_k（$k = 1, 2, \ldots, n_L$）の両端点は，ノード集合 $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n_Q}\}$ に属し，逆に，ノード $q_{k'}$（$k' = 1, 2, \ldots, n_Q$）はいずれかのリンクの端点であるとする．つまり，リンクはノード以外の点では交差せず，リンクの端点以外にノードはない．また，全てのリンクは連結されているものとしておく．次に，扱う点オブジェクトは，この無向ネットワーク $\mathcal{N}$ 上に確率的に発生していると仮定する．ここで，点オブジェクトがネットワーク $\mathcal{N}$ 上に分布しているとは，その点オブジェクトがネットワーク $\mathcal{N}$ のいずれかのリンクの上に乗っている状態を指す．また，このネットワーク $\mathcal{N}$ 上での 2 点間の距離は，2 点間を結ぶ最短経路の長さ（これをネットワーク距離と呼ぶ）で表すことにする．なお以下では，特に言及しない限り，距離とはネットワーク距離を意味するものとする．

以上の定義に基づき，本章では，ネットワーク $\mathcal{N}$ 上の単一種類の点オブジェクトの分布について考えていく．ここで，点オブジェクトはネットワーク $\mathcal{N}$ 上に均一分布に従って分布しているものと仮定する．ネットワーク $\mathcal{N}$ 上の均一分布は，$f(x)$ を点 x における密度関数とすると，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l_T}, & x \in L_T, \\ 0, & x \notin L_T \end{cases} \tag{2.1}$$

で表される．この均一分布の仮定の下では，ネットワーク $\mathcal{N}$ 上の微小領域 $x \sim x + \triangle x$ に点オブジェクトが立地する確率は，その位置によらず一定となる．ネットワーク $\mathcal{N}$ のサブ・ネットワーク $\mathcal{S}$ を考え，そのリンクの長さの総延長を l_S（$l_S \leq l_T$），その上に立地する点オブジェクトの個数を $N(S)$ と書くことにすると，合計 n 個の点オブジェクトのうち，サブ・

ネットワーク $\mathcal{S}$ 上に立地する個数が n_S 個である確率 $Pr[N(S) = n_S]$ は，

$$Pr\left[N(S) = n_S\right] = \ {}_nC_{n_S}\left(\frac{l_S}{l_T}\right)^{n_S}\left(1 - \frac{l_S}{l_T}\right)^{n-n_S}, \tag{2.2}$$

で表される二項分布に従う．このため，有限のネットワーク上に点オブジェクトが均一に分布する確率過程は，二項ポイント過程と呼ばれる（奥野，1977; Okabe et al., 1992）．

点オブジェクトの分布が二項ポイント過程に従っているという仮定は，点オブジェクトどうしが互いに全く独立に立地している状態を表すと推測される．また逆に，与えられた点オブジェクトが二項ポイント過程に従って分布していないということは，点オブジェクト間に何らかの相互作用が働いていることを示していると考えられる．具体的な分析対象として都市内の商業施設を例に取ると，実際の店舗分布が二項ポイント過程に従う分布と比較して偏っているのであれば，店舗間に，互いに相手の近くに立地しようとしたり，逆に，相手を避けて立地しようとするといった，相互作用が存在している可能性があると言うことである．点オブジェクトどうしが互いに引き付けあっている場合，その分布には密な部分が存在することになるので，これをクラスタリングの傾向と呼ぶことにする．一方，反発しあっている場合，点オブジェクトどうしが互いになるべく離れようとした結果，規則正しい分布となるので，これをレギュラリティの傾向と呼ぶ．

今，無向ネットワーク $\mathcal{N}$ における K 関数を，ネットワーク K 関数として次のように定義する．ただし，$\mathrm{E}(\cdot)$ は期待値，ω はリンクの単位長さあたりの点オブジェクトの個数（密度）を，それぞれ表す．

$$K(t) = \frac{1}{\omega}\ \mathrm{E}\left(\begin{array}{l}\text{ネットワーク } \mathcal{N} \text{ 上の任意の点オブジェクトから} \\ \text{距離 } t \text{ 以内にある他の点オブジェクトの個数}\end{array}\right). \tag{2.3}$$

点オブジェクトが二項ポイント過程に従って分布している場合，式（2.3）において点オブジェクトの密度を表す ω は，ネットワーク $\mathcal{N}$ 上の位置に関わらず一定の値を取る．このとき，式（2.3）の右辺の期待値の部分は，ネットワーク $\mathcal{N}$ 上に任意の一点 p（点オブジェクトの 1 つでなくてよい）を定めたとき，その点 p から距離 t 以内にあるリンクの長さの期待値に，点オブジェクトの密度 ω を乗じた値となる．点 p の位置ベクトルを x，点 p からの距離が t 以内のリンクの長さを $l_x(t)$ と書くことにすると，求めたいリンクの長さの期待値は，点 p をネットワーク $\mathcal{N}$ の全リンク L_T 上を動かして線積分し，リンクの総延長 l_T で除した平均として得られる．よって，式（2.3）の右辺の期待値は，

$$\mathrm{E}\left(\begin{array}{l}\text{ネットワーク } \mathcal{N} \text{ 上の任意の点オブジェクトから} \\ \text{距離 } t \text{ 以下にある他の点オブジェクトの個数}\end{array}\right) = \omega \cdot \frac{1}{l_T}\int_{x \in L_T} l_x(t)\,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

と書くことが出来る．従って，点オブジェクトが二項ポイント過程に従って分布している，言い換えれば，互いに全く独立に立地している場合のネットワーク K 関数の理論値 $\bar{K}(t)$ は，

$$\begin{aligned}\bar{K}(t) &= \frac{1}{\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1}{l_T}\int_{x \in L_T} l_x(t)\,\mathrm{d}x\ , \\ &= \frac{1}{l_T}\int_{x \in L_T} l_x(t)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．この理論値 $\bar{K}(t)$ と，実際に観測された点オブジェクト分布のネットワーク K 関数の値 $\tilde{K}(t)$ とを比較することで，観測された点オブジェクトが，二項ポイント過程に従っ

ているかどうかを判断することが出来る．そして，従っていないと判断される場合には，点オブジェクトどうしの間に，立地を左右する相互作用が存在する可能性がある．このとき，$\tilde{K}(t) < \bar{K}(t)$ であればレギュラリティの傾向，逆に，$\tilde{K}(t) > \bar{K}(t)$ であればクラスタリングの傾向があることが，それぞれ推測される．

次に，実際に観測された点オブジェクトの分布について，ネットワーク K 関数を求めることを考えよう．ネットワーク $\mathcal{N}$ 上で，n 個の点オブジェクトから成る分布 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ が観測されたとする．式（2.3）の定義にある,「ネットワーク $\mathcal{N}$ 上の任意の点オブジェクトから距離 t 以内にある他の点オブジェクトの個数」の期待値を求めるには，n 個の点オブジェクトのそれぞれから距離 t 以内にある他の点オブジェクトの個数を数え，平均を取ればよい．定義に従うと，実際に観測された点オブジェクトの分布についてのネットワーク K 関数の値 $\tilde{K}(t)$ は，

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{l} \text{点オブジェクト } p_i \text{ から距離 } t \text{ 以内にある} \\ \text{点オブジェクト } p_j \, (i \neq j) \text{ の個数} \end{array} \right) \tag{2.6}$$

となる．いま，観測された点オブジェクト分布の密度 ω は n/l_T であるから，式 (2.6) は，

$$\tilde{K}(t) = \frac{l_T}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{l} \text{点オブジェクト } p_i \text{ から距離 } t \text{ 以内にある} \\ \text{点オブジェクト } p_j \, (i \neq j) \text{ の個数} \end{array} \right) \tag{2.7}$$

と書くことが出来る．この $\tilde{K}(t)$ と前述の理論値 $\bar{K}(t)$ を，異なる t の値ごとに，例えばグラフにプロットして比較することにより，点オブジェクトどうしの立地の関連性についての所見が得られる．

ところで，二項ポイント過程に従う点オブジェクトが連続平面上に分布している場合，任意の点オブジェクトから直線距離 t 以内に含まれる他の点オブジェクトの個数は，その点オブジェクトから直線距離 t 以内の部分領域の面積，すなわち，半径 t の円の面積 πt^2 に比例すると考えられる．従って，K 関数の理論値 は次式となる．

$$\bar{K}(t) = \pi t^2 \ . \tag{2.8}$$

しかしながら，対象とする領域の周縁付近の点では，その部分領域の面積は πt^2 よりも小さいため，観測された点オブジェクトの分布から $\tilde{K}(t)$ を算出する際には，このエッジ・エフェクトを加味した補正を行う必要がある（Bailey · Gatrell，1995）．これに対し，ここで示したネットワーク K 関数の場合，リンクの長さの期待値をリンク全体 L_T についての線積分で求めているために，対象とするネットワークの外側を考慮せずに算出できるという利点がある．なお，このリンクの長さの期待値の算出方法については，4 章で改めて説明する．

3　2 種類の点オブジェクト分布に対するネットワーク K 関数法

次に，2 種類の点オブジェクト分布が与えられた場合，その 2 つの分布の間に相互関係があるかどうかを分析することを考える．都市の中には，鉄道駅と住宅，大型商業施設と中小小売店舗といったように，互いに相手の立地に影響を及ぼしていると予想される施設が多くあるので，それらの関係を取り扱う手法を提案しようというのである．一般に都市においては，鉄道や大規模商業施設，大規模公園などの基盤施設が，住宅などの非基盤施設に及ぼす影響が注目されることが多い．そこで，本研究では，基盤施設にあたる点オブジェクトの位

置は固定されているものとして，これを基準としたときの非基盤施設の分布の特徴について扱っていく．

ここで，2 章と同様に，非基盤施設の点オブジェクトはネットワーク $\mathcal{N}$ 上に均一分布に従って分布しているものと仮定する．すなわち，非基盤施設の分布する確率過程は，二項ポイント過程であると仮定する．(均一分布，二項ポイント過程については，それぞれ，式 (2.1)，式 (2.2) 参照.) このとき，非基盤施設が基盤施設から距離 $x \sim x + \triangle x$ の微小領域に立地する確率は，その微小領域に含まれるリンクの長さに比例する．この仮定を基盤施設との関係で考えると，非基盤施設の点オブジェクトが，二項ポイント過程に従って分布しているという仮定は，非基盤施設が基盤施設とは独立に分布している状態を表していると推測される．逆に，非基盤施設の点オブジェクトが，二項ポイント過程に従って分布していないということは，非基盤施設と基盤施設との間に，何らかの相互関係が存在することを示唆していると考えられる．

2 章と同様に定義された無向ネットワーク $\mathcal{N}$ 上に，2 種類の点オブジェクト P_A，P_B が分布しているとする．便宜上，n_A 個の点オブジェクトから成る分布 $P_A = \{p_{A1}, p_{A2}, \ldots, p_{An_A}\}$ を非基盤施設，n_B 個の点オブジェクトから成る分布 $P_B = \{p_{B1}, p_{B2}, \ldots, p_{Bn_B}\}$ を基盤施設としておく．そして，基盤施設 P_B に対し非基盤施設 P_A の分布が独立であるかどうかを考える．ここで，基盤施設の点オブジェクト P_B から見た非基盤施設の点オブジェクト P_A のネットワーク K 関数を，リンクの単位長さあたりの点オブジェクト P_A の個数（密度）を ω_A として，

$$K^{BA}(t) = \frac{1}{\omega_A}\,\mathrm{E}\left(\begin{array}{l}\text{任意の点オブジェクト } P_B \text{ から}\\ \text{距離 } t \text{ 以内にある点オブジェクト } P_A \text{ の個数}\end{array}\right) \tag{3.1}$$

と定義し，これをネットワーク・クロス K 関数と呼ぶ．

点オブジェクト P_A が二項ポイント過程に従って分布している場合には，式 (3.1) の ω_A は常に一定値を取る．従って，固定された点オブジェクト P_B に対する式 (3.1) の右辺の期待値は，任意の点オブジェクト P_B から距離 t 以内にあるリンクの長さの期待値に，点オブジェクト P_A の密度 ω_A を掛けた値となる．このリンクの長さの期待値は，n_B 個の点オブジェクト P_B のそれぞれから，距離 t 以内にあるリンクの長さの平均として求められる．すなわち，$p_{Bi}(i = 1, 2, \ldots, n_B)$ からの距離が t 以内のリンクの長さを $l_{Bi}(t)$ と書くとき，

$$\mathrm{E}\left(\begin{array}{l}\text{任意の点オブジェクト } P_B \text{ から}\\ \text{距離 } t \text{ 以内にある点オブジェクト } P_A \text{ の個数}\end{array}\right) = \omega_A \cdot \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} l_{Bi}(t)\,, \tag{3.2}$$

であり，ネットワーク $\mathcal{N}$ の全リンク L_T 上で線積分をする必要のあったネットワーク K 関数と比べ，かなり簡単な処理で済む．以上から，点オブジェクト P_A が二項ポイント過程に従って分布している，すなわち，点オブジェクト P_A が点オブジェクト P_B とは独立に立地している場合のネットワーク・クロス K 関数の理論値 $\bar{K}^{BA}(t)$ は，

$$\begin{aligned}\bar{K}^{BA}(t) &= \frac{1}{\omega_A} \cdot \omega_A \cdot \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} l_{Bi}(t)\\ &= \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} l_{Bi}(t)\end{aligned} \tag{3.3}$$

と書くことが出来る．

次に，実際に観測された点オブジェクト P_A の分布について，点オブジェクト P_B から見たネットワーク・クロス K 関数の値 $\tilde{K}^{BA}(t)$ を求めることを考えよう．定義の「任意の点オブジェクト P_B から距離 t 以内にある点オブジェクト P_A の個数」は，n_B 個の点オブジェクト P_B のそれぞれについて，距離 t 以内にある点オブジェクト P_A の個数を数え，平均を取れば求められる．つまり，

$$\tilde{K}^{BA}(t) = \frac{1}{\omega_A} \cdot \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} \left(\begin{array}{l} \text{点オブジェクト } p_{Bi} \text{ から距離 } t \text{ 以内にある} \\ \text{点オブジェクト } p_{Aj}(j=1,2,\ldots,n_A) \text{ の個数} \end{array} \right) \tag{3.4}$$

である．ここで，観測された点オブジェクト P_A の密度 ω_A は n_A/l_T であるから，実際に観測された点オブジェクト P_A についての，点オブジェクト P_B から見たネットワーク・クロス K 関数の値 $\tilde{K}^{BA}(t)$ は，

$$\tilde{K}^{BA}(t) = \frac{l_T}{n_A n_B} \sum_{i=1}^{n_B} \left(\begin{array}{l} \text{点オブジェクト } p_{Bi} \text{ から距離 } t \text{ 以内にある} \\ \text{点オブジェクト } p_{Aj}(j=1,2,\ldots,n_A) \text{ の個数} \end{array} \right) \tag{3.5}$$

となる．この $\tilde{K}^{BA}(t)$ と前述の理論値 $\bar{K}^{BA}(t)$ とを比較すれば，点オブジェクト P_A の点オブジェクト P_B に対する立地の独立性を判断する基準が得られる．そして，点オブジェクト P_A の立地が点オブジェクト P_B に対して独立でない場合，$\tilde{K}^{BA}(t) < \bar{K}^{BA}(t)$ であれば，点オブジェクト P_A は点オブジェクト P_B を避けて立地しようとしている可能性があり，逆に，$\tilde{K}^{BA}(t) > \bar{K}^{BA}(t)$ であれば，点オブジェクト P_A は点オブジェクト P_B の周りに集まって立地しようしている可能性がある，と推測される．

4　ネットワーク K 関数の計算法

以上で提案したネットワーク K 関数を実際に計算するためには，ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のある点から距離 t 以内にあるリンクの長さの算出が必要となる．本章では，このリンクの長さの算出を中心として，ネットワーク K 関数の計算法について詳説する．なお，ここに示す手法は，四茂野（1993），Okabe *et al.*（1995），Okunuki・Okabe（1998）で提案されたネットワーク上での最短距離に関する計算法を精緻化し，ネットワーク K 関数の計算法として再構成したものである．

式（2.5）に示されたネットワーク K 関数 $K(t)$ の定義を見ると，$K(t)$ を算出するためには，ネットワーク $\mathcal{N}$ 上の任意の位置にある点 p に対して $l_x(t)$ を求める必要があることがわかる．そこで，ネットワーク $\mathcal{N}$ の任意の 1 本のリンク L_k（$k=1,2,\ldots,n_L$）上に位置する点 p に着目し，その点 p からの距離が t 以内となるリンクの長さ $l_x(t)$ を考えていく．リンク L_k の両端点のノードを q_A，q_B（便宜上，q_A を始点，q_B を終点と呼ぶ），長さ l_k とし，点 p はこの始点 q_A から距離 s（$0 \le s \le l_k$）の位置にあるとする．また，リンク L_i のうち，点 p からの距離が t 以内である部分の長さを $g_i(t|s)$ で表すことにする．

$l_x(t)$ の定式化の手順は，以下に示す 3 つのステップから成っている．なお，ここでは，ネットワークはパラレルリンクを含まないものと仮定して議論を進める．ただし，パラレルリンクを含む場合であっても，ネットワークに簡単な操作を加えることにより，同様の手順で扱うことが出来る．

ステップ 1：ネットワーク $\mathcal{N}$ の再構築

はじめに，L_k の始点 q_A から他の全てのノードへの最短経路をつなぎ，最短距離木を発生させる（図 1(a) の太線）．このとき，ネットワーク $\mathcal{N}$ のリンクのうち最短距離木に含まれないリンク（図 1(a) の細線，線分 q_1q_2）には，最短距離木の各枝先（図 1(a) の q_1，q_2）から葉を伸ばしたときに異なる葉から伸びてきた葉が接する特別な点が，必ず存在する．この点は衝突点（図 1(a)）と呼ばれ，衝突点では q_A から等距離の最短経路が複数存在する．ここで，q_A が生成する衝突点の集合を $Q(q_A) = \{q_{A1}, q_{A2}, \ldots\}$ で表すこととし，これらを新たなノードとしてネットワーク $\mathcal{N}$ に加える（図 1(b)）．同様に，q_B の生成する衝突点の集合 $Q(q_B) = \{q_{B1}, q_{B2}, \ldots\}$ もネットワーク $\mathcal{N}$ に加える（図 1(c)）．

次に，点 p の生成する衝突点 $Q(p) = \{q_{p1}, q_{p2}, \ldots\}$ を考える．p が L_k 上を q_A から q_B まで移動するとき（すなわち，s が 0 から l_k まで変化するとき），衝突点 $Q(p)$ も移動する．例えば，図 2 の q_{p1} は q_{A1} から q_{B1} まで移動する．ここで，この q_{p1} の軌跡は一本のリンクであると見なし，q_{p1} の軌跡リンクと呼ぶことにする．図 2 の例では，q_{p1} の軌跡リンクはノード q_3 を含んでいるが，$q_{A1}q_3$，q_3q_{B1} という 2 本のリンクではなく，$q_{A1}q_{B1}$ という 1 本の軌跡リンクと見なす．同様にして，点 p の生成する全ての衝突点 $Q(p) = \{q_{p1}, q_{p2}, \ldots\}$ について，軌跡リンクを求める．以下では，これらの軌跡リンクを 4 種類（グループ 1〜4）に分類して扱うが，分類の方法についてはステップ 2 で説明する．

このようにして再構築されたネットワークを $\mathcal{N}'$，そのリンクの総数を $n_{L'}$ 本と書くことにし，$n_{L'}$ 本のリンクを次の 9 種類に分類する（図 3 参照）．

[1] p の移動するリンク L_k（線分 q_Aq_B）
[2] q_A からの最短経路が q_B を通らないリンク（q_A を根とする木に含まれるリンク）
[3] q_A からの最短経路が q_B を通るリンク（q_B を根とする木に含まれるリンク）
[4] 〜 [7] 軌跡リンク（グループ 1〜4）
[8] 軌跡リンク（グループ 1）上に根を持つ木に含まれるリンク
[9] 軌跡リンク（グループ 2〜4）上に根を持つ木に含まれるリンク

ステップ 2：$g_i(t|s)$ の定式化

ステップ 2 では，再構築されたネットワーク $\mathcal{N}'$ の各リンク L_i（$i = 1, 2, \ldots, n_{L'}$）について $g_i(t|s)$ の定式化を行う．ステップ 1 でネットワークを再構築したことにより，$g_i(t|s)$ は上記の 9 種類の分類ごとに，それぞれ t および s の一次式として定式化することが出来る．以下では，各リンク L_i の両端点のうち，始点 q_A に近い方の端点をリンク L_i の始点 q_{fi}，遠い方の端点を終点 q_{ti} と呼ぶことにし，始点 q_A からの両端点までの距離 x_{fi}，x_{ti}（ただし，$x_{fi} < x_{ti}$）は求められているものと仮定する．なお，ここで次式が成立している．

$$x_{ti} - x_{fi} = l_i. \tag{4.1}$$

[1] p の移動するリンク L_k（線分 q_Aq_B）の場合（図 4）

p の移動するリンク L_k（すなわち $i = k$）では，始点 $q_{fk} = q_A$，終点 $q_{tk} = q_B$ であるから，始点 q_A から両端点までの距離は，

$$x_{fk} = 0, \qquad x_{tk} = l, \tag{4.2}$$

である．このとき，点 p からの距離が t 以内である部分の長さ $g_k(t|s)$ は，以下のように表される．

$0 \leq s \leq \dfrac{l_k}{2}$ のとき

$$g_k(t|s) = \begin{cases} 2t \ , & 0 < t \leq s \ , \\ t + s \ , & s < t \leq l_k - s \ , \\ l_k \ , & l_k - s < t \leq \infty \ . \end{cases} \tag{4.3}$$

$\dfrac{l_k}{2} < s \leq l_k$ のとき

$$g_k(t|s) = \begin{cases} 2t \ , & 0 < t \leq l_k - s \ , \\ t + (l_k - s) \ , & l_k - s < t \leq s \ , \\ l_k \ , & s < t \leq \infty \ . \end{cases} \tag{4.4}$$

[2] q_A からの最短経路が q_B を通らないリンクの場合（図 5）

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t \leq x_{fi} + s \ , \\ t - (x_{fi} + s) \ , & x_{fi} + s < t \leq x_{ti} + s \ , \\ x_{ti} - x_{fi} \ , & x_{ti} + s < t \leq \infty \ . \end{cases} \tag{4.5}$$

[3] q_A からの最短経路が q_B を通るリンクの場合（図 6）

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t \leq x_{fi} - s \ , \\ t - (x_{fi} - s) \ , & x_{fi} - s < t \leq x_{ti} - s \ , \\ x_{ti} - x_{fi} \ , & x_{ti} - s < t \leq \infty \ . \end{cases} \tag{4.6}$$

[4] 軌跡リンク（グループ 1）の場合（図 7）

図 3 の q_{A1}，q_{B1} を端点とする軌跡リンクを考え，これを衝突点 q_{p1} の軌跡リンクと呼ぶことにする．このグループに属する軌跡リンクは，q_A から q_{B1} への最短経路，q_B から q_{A1} への最短経路がそれぞれ，q_{B1}，q_{A1} 以外の衝突点を含まないと言う特徴を持っている．q_A から q_{A1} までの距離を x_{A1}，q_A から q_{B1} までの距離を x_{B1} と書くことにすると，

$$x_{A1} - x_{B1} = l_k \tag{4.7}$$

が成り立つ．点 p からこの軌跡リンク上の任意の点までの最短経路が，q_A，q_B のどちらを通るかは，s の値によって決まり，$g_i(t|s)$ は，次のように場合分けをして定式化される．

$0 \leq s \leq \dfrac{l_k}{2}$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t \leq x_{B'} + s \ , \\ t - (x_{B'} + s) \ , & x_{B'} + s < t \leq x_{A'} - s \ , \\ 2t - (x_{A'} + x_{B'}) \ , & x_{A'} - s < t \leq x_{A'} \ , \\ x_{A'} - x_{B'} \quad (= l_k) \ , & x_{A'} < t \leq \infty \ . \end{cases} \tag{4.8}$$

$\dfrac{l_k}{2} < s \leq l_k$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{B'} + s\ , \\ t - (x_{A'} - s)\ , & x_{A'} - s < t \leq x_{B'} + s\ , \\ 2t - (x_{A'} + x_{B'})\ , & x_{B'} + s < t \leq x_{A'} \\ x_{A'} - x_{B'} \quad (= l_k)\ , & x_{A'} < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.9}$$

[5] 軌跡リンク（グループ 2）の場合

図 3 の q_{A2}，q_{B2} を端点とする軌跡リンクを考え，これを衝突点 q_{p2} の軌跡リンクと呼ぶ．また，q_A から q_{A2} までの距離を x_{A2}，q_A から q_{B2} までの距離を x_{B2} と書くことにする．このグループに属する軌跡リンクは，q_A から q_{B2} への最短経路は q_{B2} 以外の衝突点を含むが，q_B から q_{A2} への最短経路は q_{A2} 以外の衝突点を含まないと言う特徴を持っている．また，q_A から q_{B2} までの最短経路は衝突点 q_{p1} の軌跡リンクの一部を含む．この q_A から q_{B2} までの最短経路が q_{B1} から距離 u の地点で，衝突点 q_{p1} の軌跡リンクから分岐するとすると，

$$x_{A2} - x_{B2} = l_k - u \tag{4.10}$$

が成り立つ．このとき，$g_i(t|s)$ は以下のように定式化される．

$0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}(l_k - u)$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{B2} + s\ , \\ t - (x_{B2} + s)\ , & x_{B2} + s < t \leq x_{A2} - s\ , \\ 2t - (x_{A2} + x_{B2})\ , & x_{A2} - s < t \leq x_{A2}\ , \\ x_{A2} - x_{B2} \quad (= l_k - u)\ , & x_{A2} < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.11}$$

$\dfrac{1}{2}(l_k - u) \leq l_k - u$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{A2} - s\ , \\ t - (x_{A2} - s)\ , & x_{A2} - s < t \leq x_{B2} + s\ , \\ 2t - (x_{A2} + x_{B2})\ , & x_{B2} + s < t \leq x_{A2}\ , \\ x_{A2} - x_{B2} \quad (= l_k - u)\ , & x_{A2} < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.12}$$

$l_k - u < s \leq l_k$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{A2} - s\ , \\ t - (x_{A2} - s)\ , & x_{A2} - s < t \leq x_{B2} - s + 2(l_k - u)\ , \\ 2t + 2s - (x_{A2} + x_{B2}) - 2(l_k - u)\ , & x_{B2} - s + 2(l_k - u) < t \\ & \quad \leq x_{A2} - s + (l_k - u) \\ x_{A2} - x_{B2} \quad (= l_k - u)\ , & x_{A2} - s + (l_k - u) < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.13}$$

[6] 軌跡リンク（グループ 3）の場合

図 3 の q_{A3}，q_{B3} を端点とする軌跡リンクを考え，これを衝突点 q_{p3} の軌跡リンクと呼ぶ．また，q_A から q_{A3} までの距離を x_{A3}，q_A から q_{B3} までの距離を x_{B3} と書くことにする．こ

のグループに属する軌跡リンクは，q_B から q_{A3} への最短経路は q_{A3} 以外の衝突点を含むが，q_A から q_{B3} への最短経路は q_{B3} 以外の衝突点を含まないと言う特徴を持っている．また，q_A から q_{B3} までの最短経路は衝突点 q_{p1} の軌跡リンクの一部を含む．この q_A から q_{B3} までの最短経路が q_{B1} から距離 u の地点で，衝突点 q_{p1} の軌跡リンクから分岐するとすると，

$$x_{A3} - x_{B3} = u \tag{4.14}$$

が成り立つ．このとき，$g_i(t|s)$ は次のように定式化される．

$0 \le s \le l_k - u$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t \le x_{B3} + s \ , \\ t - (x_{B3} + s) \ , & x_{B3} + s < t \le x_{A3} + s \ , \\ 2t - 2s - (x_{A3} + x_{B3}) \ , & x_{A3} + s < t \le x_{B3} + s + u \ , \\ x_{A3} - x_{B3} \quad (= u) \ , & x_{B3} + s + u < t \le \infty \ . \end{cases} \tag{4.15}$$

$l_k - u \le s \le l_k - \dfrac{1}{2}u$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t \le x_{B3} + s \ , \\ t - (x_{B3} + s) \ , & x_{B3} + s < t \le x_{A3} + 2l_k - 2u - s \ , \\ 2t - (x_{A3} + x_{B3}) - 2(l_k - u) \ , & x_{A3} + 2l_k - 2u - s < t \le x_{A3} + l_k - u \ , \\ x_{A3} - x_{B3} \quad (= u) \ , & x_{A3} + l_k - u < t \le \infty \ . \end{cases} \tag{4.16}$$

$l_k - \dfrac{1}{2}u < s \le l_k$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t \le x_{A3} + 2l_k - 2u - s \ , \\ t - (x_{A3} + 2l_k - 2u - s) \ , & x_{A3} + 2l_k - 2u - s < t \le x_{B3} + s \ , \\ 2t - (x_{A3} + x_{B3}) - 2(l_k - u) \ , & x_{B3} + s < t \le x_{A3} + l_k - u \\ x_{A3} - x_{B3} \quad (= u) \ , & x_{A3} + l_k - u < t \le \infty \ . \end{cases} \tag{4.17}$$

[7] 軌跡リンク（グループ 4）の場合（図 8）

図 3 の q_{A4}，q_{B4} を端点とする軌跡リンクを考え，これを衝突点 q_{p4} の軌跡リンクと呼ぶ．また，q_A から q_{A4} までの距離を x_{A4}，q_A から q_{B4} までの距離を x_{B4} と書くことにする．このグループに属する軌跡リンクは，q_A から q_{B4} への最短経路，q_B から q_{A4} への最短経路がそれぞれ，q_{B4}，q_{A4} 以外の衝突点を含んでいると言う特徴を持っている．また，衝突点 q_{p4} の軌跡リンクは，q_{p1} の軌跡リンク上に 2 つの根を持つリンクの一部である．2 つの根のうち，q_{B1} に近い方を q_C，q_{A1} に近い方を q_D と呼ぶことにし，q_C と q_{B1} の距離を u，q_D と q_{A1} の距離を v で表すことにする．このとき，$l_k > u + v$ に注意すると，

$$x_{A4} - x_{B4} = l_k - (u + v) \tag{4.18}$$

が成り立つ．

点 p からこの軌跡リンク上の任意の点までの最短経路が，q_A，q_B のどちらを通るかは，s の値によって決まる．そこで，まず，点 p から q_C，q_D までの最短経路を考えると，

$$
q_C \text{ までの最短経路} \begin{cases} q_A \text{ を通る場合} & s \leq l_k - u\ ,\quad (s + x_{B1} + u \leq x_{A1} \text{より}) \\ q_B \text{ を通る場合} & s > l_k - u\ , \end{cases}
$$

$$
q_D \text{ までの最短経路} \begin{cases} q_A \text{ を通る場合} & s \leq v\ , \\ q_B \text{ を通る場合} & s > v \end{cases}
$$

と場合分けされる．ここで，$l_k > u + v$ より $l_k - u > v$ であることを考慮すると，場合分けは次の 3 種類にまとめられる．

(i)	$0 \leq s \leq v$	q_C: q_A を通る，	q_D: q_A を通る，
(ii)	$v < s \leq l_k - u$	q_C: q_A を通る，	q_D: q_B を通る，
(iii)	$l_k - u <\leq l_k$	q_C: q_B を通る，	q_D: q_B を通る．

（i）および（iii）では，$g_i(t|s)$ は，以下のように定式化される．

(i) $0 \leq s \leq v$ のとき

$$
g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{B4} + s\ , \\ t - (x_{B4} + s)\ , & x_{B4} + s < t \leq x_{B4} + s + l_k - (u + v)\ , \\ x_{A4} - x_{B4} \quad (= l_k - (u + v))\ , & x_{B4} + s + l_k - (u + v) < t \leq \infty \end{cases} \tag{4.19}
$$

(iii) $l_k - u < s \leq l_k$ のとき

$$
g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{A4} - s\ , \\ t - (x_{A4} - s)\ , & x_{A4} - s < t \leq x_{A4} - s + l_k - (u + v)\ , \\ x_{A4} - x_{B4} \quad (= l_k - (u + v))\ , & x_{A4} - s + l_k - (u + v) < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.20}
$$

（ii）の場合には，s の値に応じてさらに 2 つに場合分けする必要がある．

(ii-a) $v < s \leq \frac{1}{2}(l_k - u + v)$ のとき

$$
g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{B4} + s\ , \\ t - (x_{B4} + s)\ , & x_{B4} + s < t \leq x_{A4} - s\ , \\ 2t - (x_{A4} + x_{B4})\ , & x_{A4} - s < t \leq \frac{1}{2}\{x_{A4} + x_{B4} + l_k - (u + v)\}\ , \\ x_{A4} - x_{B4}\ (= l_k - (u + v))\ , & \frac{1}{2}\{x_{A4} + x_{B4} + l_k - (u + v)\} < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.21}
$$

(ii-b) $\frac{1}{2}(l_k - u + v) < s \leq l_k - u$ のとき

$$
g_i(t|s) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t \leq x_{A4} - s\ , \\ t - (x_{A4} - s)\ , & x_{A4} - s < t \leq x_{B4} + s\ , \\ 2t - (x_{A4} + x_{B4})\ , & x_{B4} + s < t \leq \frac{1}{2}\{x_{A4} + x_{B4} + l_k - (u + v)\}\ , \\ x_{A4} - x_{B4}\ (= l_k - (u + v))\ , & \frac{1}{2}\{x_{A4} + x_{B4} + l_k - (u + v)\} < t \leq \infty\ . \end{cases} \tag{4.22}
$$

[8] 軌跡リンク（グループ 1）上に根を持つ木に含まれるリンクの場合（図 9）

衝突点 q_{p1} の軌跡リンク上に根 q_C を持つ木を考える．q_{B1} から q_C までの距離を u（ただし，$l_k > u$）とすると，$g_i(t|s)$ は以下のように定式化される．

$0 \leq s \leq l_k - u$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0\,, & 0 < t \leq x_{fi} + s\,, \\ t - (x_{fi} + s)\,, & x_{fi} + s < t \leq x_{ti} + s\,, \\ x_{ti} - x_{fi} \quad (= l_i)\,, & x_{ti} + s < t \leq \infty\,. \end{cases} \tag{4.23}$$

$l_k - u < s \leq l_k$ のとき

$$g_i(t|s) = \begin{cases} 0\,, & 0 < t \leq x_{fi} - s\,, \\ t - (x_{fi} - s)\,, & x_{fi} - s < t \leq x_{ti} - s\,, \\ x_{ti} - x_{fi} \quad (= l_i)\,, & x_{ti} - s < t \leq \infty\,. \end{cases} \tag{4.24}$$

[9] 軌跡リンク（グループ 2〜4）上に根を持つ木に含まれるリンクの場合

上記の，[5]，[6]，[7]，[8] の方法を組み合わせて，定式化が可能である．

ステップ 3：$g_i(t|s)$ の統合による $l_x(t)$ の定式化

以上のように，L_k 上の任意の位置にある点 p に対し，L_k を含む全てのリンク L_i（$i = 1, 2, \ldots, k, \ldots, n'_L$）について，点 p から距離 t 以内にある部分の長さ $g_i(t|s)$ を t および s の 1 次式として定式化することが出来る．ここで，点 p が L_k 上にある場合の $g_i(t|s)$ の値を $g_i^k(t|s)$，$l_x(t)$ の値を $l_x^k(t|s)$ と書き直すことにすると，$l_x^k(t|s)$ は次式で表される．

$$l_x^k(t|s) = \sum_{i=1}^{n'_L} g_i^k(t|s)\,. \tag{4.25}$$

さてここで，2 章に示したネットワーク K 関数法を考えよう．点オブジェクトが二項ポイント過程に従って分布しているという仮定の下で，ネットワーク K 関数の理論値を算出するためには，点 p がネットワーク $\mathcal{N}'$ 上の任意の位置にある場合の $l_x(t)$ の期待値を求める必要がある（式（2.5）参照）．従って，点 p がリンク L_k 上を始点 q_A から終点 q_B まで（すなわち，$0 \leq s \leq l_k$）移動し，さらに，k も $1, 2, \ldots, n_{L'}$ を変化するときの，$l_x^k(t|s)$ の平均を求めればよい．すなわち，

$$\mathrm{E}(l_x(t)) = \frac{1}{l_T} \sum_{k=1}^{n'_L} \int_0^{l_k} l_x^k(t|s)\,\mathrm{d}s \tag{4.26}$$

である．この式を用いると，式 (2.5) は，以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{l_T} \int_{x \in L_T} l_x(t)\,\mathrm{d}x\,, \\ &= \frac{1}{l_T} \sum_{k=1}^{n'_L} \int_0^{l_k} l_x^k(t|s)\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

ネットワーク・クロス K 関数 $K^{BA}(t)$ の場合には，基盤施設 P_B の点オブジェクト q_{Bi}（$i = 1, 2, \ldots, n_B$）から距離 t 以内にあるリンクの長さ $l_{Bi}(t)$ を求める必要がある．そこでま

ず，基盤施設 P_B の n_B 個の点オブジェクトをネットワーク $\mathcal{N}'$ のノードとして加える．$l_{Bi}(t)$ の値は，リンク L_k の始点 q_A が加えたノード p_{Bi} に対応していて，かつ，$s=0$ のときの $l_x(t)$ の値に等しいことから，3 章で以下のように定義された $K^{BA}(t)$ も，$K(t)$ の場合と同様にして求めることが出来る．

$$K^{BA}(t) = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} l_{Bi}(t)\,. \tag{4.28}$$

最後に計算負荷について述べる．一般に，n_L 本のリンクと n_Q 個のノードから成るネットワーク $\mathcal{N}$ 上で，ある 1 つのノードから最短距離木を発生させるときの計算オーダーは $O(n_Q \log n_Q)$ であることが知られている（Fredman・Tarjan, 1984）．従って，単一の点オブジェクト分布に対するネットワーク K 関数法の場合には，ネットワーク $\mathcal{N}$ の全てのノード q_i（$i=1,2,\ldots,n_Q$）から最短距離木を発生させる必要があるため，計算オーダーは $O({n_Q}^2 \log n_Q)$ となる．一方，ネットワーク・クロス K 関数法では，基盤施設 P_B の点オブジェクトの n_B 個から最短距離木を発生させればよい．n_B は，n_Q に比べて十分に小さいと仮定できるので，ネットワーク・クロス K 関数の計算オーダーは $O(n_Q \log n_Q)$ で済む．

5　終わりに

本研究では，都市を道路リンクで構成されるネットワーク空間と見なした上で，そこに分布する施設どうしの立地の関連性を分析することを目的として，連続平面における点分布の分析手法である K 関数法を，ネットワーク空間に拡張した．

2 章では，ネットワーク上に分布する 1 種類の点オブジェクトに対し，その点オブジェクトどうしの間にクラスタリングやレギュラリティの傾向があるかどうかを分析する手法として，ネットワーク K 関数法を示した．3 章では，基盤施設，非基盤施設の 2 種類の点オブジェクト間のネットワーク・クロス K 関数を定義し，基盤施設と非基盤施設の立地の関連性についての分析手法を提案した．

4 章には，ここで提案したネットワーク上の K 関数の計算法を示した．この計算の基礎となる「ネットワーク上で距離 t 以内にあるリンクの長さ」は，ネットワーク K 関数の場合にはネットワーク $\mathcal{N}$ の全てのノードから，ネットワーク・クロス K 関数の場合には全ての基盤施設 P_B の点オブジェクトから，最短距離木を発生させるという段階を経て，それぞれのリンクについての 1 次式として定式化することが出来る．この最短距離木を求める計算のオーダーは，ネットワーク K 関数では $O({n_Q}^2 \log n_Q)$，ネットワーク・クロス K 関数では $O(n_Q \log n_Q)$ となる．

本研究では，分析対象として点的施設のみを取り上げてきた．しかしながら，都市施設の中には，道路や鉄道など, 線もしくはその集合であるネットワークとして捉えるべき施設や，大型の複合施設や大規模工場，大規模公園など，広がりを持った面として扱うべき施設も少なくない．従って，線オブジェクト，面オブジェクトへの拡張は，今後の課題の一つである．中でも基盤施設が，幹線道路などの線オブジェクト，大規模商業施設などの面オブジェクトである場合の，ネットワーク・クロス K 関数法は特に重要であると思われる．また，鉄道網と道路網など，ネットワークどうしの位置関係を扱うことにも興味が持たれる．

謝辞

本研究を進めるにあたり，東京大学の貞広幸雄先生には K 関数法の重要性をご指摘いただき，名古屋大学の奥貫圭一先生には計算法について有用なご助言を頂いた．紙面を借りて，深く御礼申し上げる．なお，本研究は，文部省科学研究費，基礎研究 (B)(2) 課題番号 11480092,「リアルタイム・ミクロエリア・マーケティング支援システム開発の基礎的研究」の一部として行われたものである．

参考文献

[1] Bailey, T.C. and Gatrell A.C. (1995) *Interactive Spatial Data Analysis*, Harlow, Longman.

[2] Cressie, N.A. (1991) *Statistics for Spatial Data*, New York, John Wiley.

[3] Fotheringham, S. and Rogerson, P. (Editor)(1994) *Spatial Analysis and GIS (Technical Issues in Geographic Information Systems)*, London, Taylor & Francis.

[4] Fredman, M.L. and Tarjan, R.E. (1984) Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms. *Proceedings of the 25th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science*, Singer Island, Florida, pp.338-346.

[5] Okabe, A. and Fujii, A. (1984) The Statistical Analysis through a Computational Method of a Distribution of Points in Relation to Its Surrounding Network, *Environment and Planning A*, Vol.16, pp.107-114.

[6] Okabe, A., Yoshikawa, T., Fujii, A. and Oikawa, K.(1988) The Statistical Analysis of a Distribution of Activity Points in Relation to Surface-Like Elements, *Environment and Planning A*, Vol. 20, pp.609-620.

[7] Okabe, A. and Yoshikawa, T. (1989) The Multi Nearest Neighbor Distance Methods for Analyzing the Compound Effect on Infrastructural Elements on the Distribution of Activity Points, *Geographical Analysis*, Vol.21, No.3, pp.216-235.

[8] Okabe, A., Boots, B. and Sugihara, K. (1992) *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Chichester, John Wiley.

[9] Okabe, A., Yomono, H. and Kitamura, M. (1995) Statistical Analysis of the Distribution of Points on a Network, *Geographical Analysis*, Vol.27, No. 2, pp.152-175.

[10] Okabe, A. and Kitamura, M. (1996) A Computational Method for Market Area Analysis on a Network, *Geographical Analysis*, Vol.28, No.4, pp.330-349.

[11] Okunuki, K. and Okabe, A. (1998) A computational method for optimizing the location of a store on a continuum of a network when users' choice behavior follows the Huff model, *Discussion Paper*, Center for Spatial Information Science at the University of Tokyo, No.19.

[12] Ripley, B.D. (1981) *Spatial Statistics*, New York, John Wiley.

[13] Upton, G. and Fingleton, B. (1985) *Spatial Data Analysis by Example: Volume 1: Point Pattern and Quantitative Data*, New York, John Wiley

[14] 奥貫圭一・岡部篤行（1996）道路ネットワークにおける店舗の需要推定と立地最適化, 地理情報システム学会講演論文集, Vol.5, pp.105-110.

[15] 奥貫圭一・岡部篤行（1997）売上げ最大化によるネットワーク上の店舗立地最適化手法, GIS-理論と応用, Vol.5, No.2, pp.11-18.

[16] 奥野隆史（1977）計量地理学の基礎, 東京, 大明堂.

[17] 北村賢之・岡部篤行（1994）道路ネットワークにおける商圏確定法, GIS-理論と応用,Vol.3, No.1, pp.17-24.

[18] 吉川徹・岡部篤行（1991）多次元最近距離法による都市基盤施設が中高層住宅の地域的分布に与える複合的影響の分析, 都市計画学会学術研究論文集, Vol.26, pp.523-528.

[19] 四茂野英彦（1993）ネットワーク上での最短距離分布の計算可能性, GIS-理論と応用, Vol.1, pp.47-56.